Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год
Дифференциальные уравнения
Семинар 4. Системы уравнений и фазовое пространство (14.02.2014)
И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Определение 1. *Траекторией* непрерывной вектор-функции $f\colon I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ называется кривая

$$\{x(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

Можно также сказать, что траектория — это проекция графика функции на пространство значений $\mathbb{R}^n$.

Задача 1. Нарисовать графики и траектории следующих вектор-функций.

(a) $\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$;
(b) $\varphi(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi)$;
(c) $\varphi(t) = (t\cos t, t\sin t), \quad t \geq 0$;
(d) $\varphi(t) = (\sqrt{1-t}, \sqrt{t}), \quad t \in [0, 1]$.

Определение 2. *Траекторией* или *фазовой кривой* автономного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

называется траектория решения этого уравнения. Иными словами, траектория — это проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

В дальнейшем в этом листке при рассмотрении произвольных уравнений мы будем требовать, чтобы для них выполнялось условие теоремы существования и единственности решения (например, для (1) достаточно потребовать $f \in C^1$).

Задача 2. (*)[1] Докажите, что, через любую точку фазового пространства автономного дифференциального уравнения (1) проходит (локально) единственная фазовая кривая.

Задача 3. (*) Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \tag{2}$$

Пусть (x_0, y_0) — некоторая точка фазового пространства, в которой $f(x_0, y_0) \neq 0$. Докажите, что фазовая кривая, проходящая через эту точку, совпадает (вблизи этой точки) с интегральной кривой уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \tag{3}$$

удовлетворяющей начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Задача 4. Для следующих систем уравнений:

- построить векторное поле и нарисовать эскизы фазовых кривых;
- решить — найти явно зависимость $(x(t), y(t))$ (подсказа: в приведенных системах уравнения не зависят друг от друга);
- нарисовать фазовые кривые по найденным уравнениям (для этого, возможно, понадобится выразить y через x или x через y);
- записать соответствующее уравнение типа (3), решить его, построить поле направлений и интегральные кривые.

(a) $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0$;
(b) $\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y$;
(c) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$;
(d) $\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = y$;
(e) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$;
(f) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y$;

Задача 5. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$$

(a) Нарисовать векторное поле.
(b) Нарисовать эскиз фазовых кривых.
(c) Записать соответствующее уравнение типа (3) и решить его.
(d) Нарисовать фазовые кривые.

[1] Звёздочками отмечены задачи, которые не войдут в самостоятельную через неделю.