

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год

Дифференциальные уравнения

Семинар 2. Автономные уравнения на прямой (31.01.2014)

И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Замечание 1. Существует несколько способов записывать дифференциальные уравнения. На лекциях мы пользовались в основном обозначением $\dot{x} = f(x, t)$. В дальнейшем мы будем также часто обозначать независимую переменную через x , а искомую функцию через y , и записывать уравнение в виде $y' = f(x, y)$ или $dy/dx = f(x, y)$. Потом мы будем пользоваться и другими способами записи.

Определение 1. Геометрическое место точек плоскости (x, y) , в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется *изоклиной*. Уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где k — постоянная.

Замечание 2. Чтобы приближенно построить решения уравнения $y' = f(x, y)$, можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести решения, то есть кривые, которые в точках пересечения с изоклинами $f(x, y) = k_1, f(x, y) = k_2, \dots$ имеют касательные с угловыми коэффициентами соответственно k_1, k_2, \dots .

Задача 1. С помощью изоклин начертить (приближенно) интегральные кривые данных уравнений.

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------|
| (a) $y' = 2x - y$. | (d) $yy' + x = 0$. |
| (b) $y' = y - x^2$. | (e) $xy' = 2y$. |
| (c) $y' = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1$. | (f) $xy' + y = 0$. |
| | (g) $y' = \frac{y}{x+y}$. |

Задача 2. [1], см. также [2].

Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Составить и решить соответствующее уравнение, построить поле направлений и интегральные кривые. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести?

Задача 3. [3] Найти все решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны.

- | | |
|--|---|
| (a) $y' = x^2$. | (g) $\dot{x} = x^2 + 1$. |
| (b) $y' = e^x$. | (h) $\dot{x} = x \ln x, x > 0$. |
| (c) $y' = e^y$. | (i) $\dot{x} = 10^x$. |
| (d) $\dot{x} = t^2 + 1, x(1) = 2$ | (j) $\dot{x} = 1/(t + 2x); x(0) = -1$. Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых. |
| (e) $\dot{x} = -3x, x(3) = 10$. | (k) $\dot{x} = \cos(x - t)$. |
| (f) $\dot{x} = 2x + t, x(0) = -1/4$ (подсказка: рассмотреть замену $z = 2x + t$). Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых. | |

Задача 4. Решая уравнение $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ методом Эйлера и устремляя шаг к нулю, найти выражение для числа e .

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
- [2] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia*. Science **132** (3436): 1291–1295. doi:10.1126/science.132.3436.1291
- [3] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.