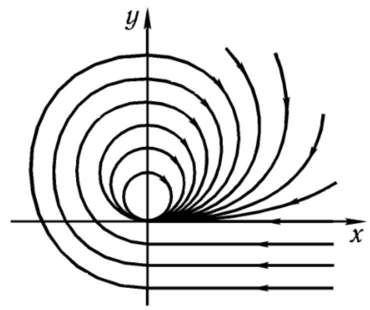

Рис. 1: Рисунок к задаче 2

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год
Дифференциальные уравнения
Семинар 13. Устойчивость (16.05.2014)
И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Задача 1. [1] Исследовать устойчивость положений равновесия следующих уравнений и систем: определить, являются ли они устойчивыми по Ляпунову, асимптотически устойчивыми?

(a) $\dot x = 0$;

(b) $\begin{cases}\dot x = 0,\\ \dot y = y\end{cases}$

(c) $\begin{cases}\dot x = y,\\ \dot y = -x\end{cases}$

(d) $\begin{cases}\dot x = x^2\\ \dot y = -y\end{cases}$

(e) $\begin{cases}\dot x = y + x(1-x^2-y^2)\\ \dot y = -x + y(1-x^2-y^2)\end{cases}$

(f) $\begin{cases}\dot x = y - x(x^2+y^2)\\ \dot y = -x - y(x^2+y^2)\end{cases}$

Задача 2. [2] Траектории системы

$$\begin{cases}\dot x = f(x,y),\\ \dot y = g(x,y),\end{cases}$$

где функции f, g, f'_x, f'_y, g'_x, g'_y непрерывны, изображены на фазовой плоскости (см. рис. 1). Что можно сказать о поведении решений при $t \to +\infty$? Является ли нулевое решение асимптотически устойчивым? Устойчивым по Ляпунову?

Задача 3. [2] Используя теорему об устойчивости по первому приближению, исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение. При каких оно является неустойчивым по Ляпунову? При каких теорема не даёт ответ на вопрос об устойчивости?

(a) $\begin{cases}\dot x = ax - 2y + x^2\\ \dot y = x + y + xy\end{cases}$

(b) $\begin{cases}\dot x = y + \sin x\\ \dot y = ax + by\end{cases}$

(c) $\begin{cases}\dot x = ax + 2y\\ \dot y = -5x - 3y\end{cases}$

Задача 4. Известно, что существует решение $x(t) \in \mathbb{R}^n$ дифференциального уравнения $\dot x = v(x)$, такое что $x(0) \neq 0$ и $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$. Что можно сказать об усточивости положения равновесия $x = 0$?

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.

[2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.