

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год

Дифференциальные уравнения

Дополнительный листок К1, дополнение. Метод Рунге–Кутты (22 апреля 2014 г.)

И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Задача 1 (Модель Рамсея). [1, 2]

Выпуск (Y) зависит от капиталовооруженности (k): $Y = f(k) = 4k^{\frac{1}{3}}$. Функция полезности, зависящая от потребления (C), такова, что эластичность замещения θ постоянна и равна 1. Динамика потребления задается уравнением:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \rho - \delta}{\theta}$$

Рост населения отсутствует. Норма амортизации капитала δ составляет 3%, субъективная норма межвременных предпочтений ρ равна 0,01. Динамика капитала задана уравнением:

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k$$

- Напишите неавтономное дифференциальное уравнение, соответствующее данной системе уравнений. Попробуйте его решить. При любых успехах обращайтесь в Нобелевский комитет – его пока не удалось решить аналитически. ☹
- Постройте¹ изоклины. $\dot{c} = 0$ и $\dot{k} = 0$ в осях (k, c) . Рассчитайте исходное стационарное состояние: запас капитала, объем выпуска, объем потребления. Есть ли другие стационарные состояния?
- Пусть в какой-то момент времени запас капитала равен $k = 10$. Прокомментируйте динамику потребления и капиталовооруженности для $c = 10$; $c = 40$ на фазовом портрете системы².
- Модифицируйте программу `RK4plot`³, чтобы она работала с двумерными векторами. Метод Рунге–Кутты в многомерном случае определяется так же, как и в одномерном, просто теперь мы работаем с векторами. (Можно, к примеру, использовать тип `array` из пакета `numpy`.) Постройте фазовые кривые для $k = 10$ и $c = 10$; $c = 20$; $c = 30$, $c = 40$.
- Найдите (численно, с точностью до двух знаков после запятой) такое значение потребления при $k = 10$, что экономика попадает в стационарное состояние из 1b.
- Для всех целых значений капитала от 1 до 400 найдите значение потребления, приводящего к стационарному состоянию. Постройте график этой функции на векторном поле, дополнив его изоклинами из 1b.
- Пусть экономика находилась в стационарном состоянии, когда норма амортизации внезапно и навсегда возросла до 5%. Постройте изоклины до и после изменения, найдите потребление, которое приведет к равновесию в экономике. Покажите на графике общую траекторию экономики.
- Пусть экономика находилась в стационарном состоянии (в момент времени $t = 0$), когда поступила информация о том, что норма амортизации увеличится до 5% в момент времени $t = 5$. Напомним, что теория сглаживания потребления утверждает, что в момент времени $t = 5$ не должно быть резких изменений в потреблении (иными словами функция временной динамики потребления должна быть непрерывной). Посчитайте уровень потребления, который необходимо установить фирме, чтобы попасть в новое стационарное состояние. Постройте траекторию экономики на фазовом портрете (изобразите изоклины до и после изменения).

Список литературы

- [1] О. Замулин, К. Сонин. *Макроэкономика*. Рукопись.
- [2] E. Arbatli. *Macroeconomics*. Seminar 8. The Ramsey model. The OLG model. Fall 2013, Joint HSE&NES program.

¹Будьте внимательны при записывании функций в программу! Скорее всего вам придется явно задать, что все операции выполняются с дробными числами.

²Если вы не делали доплисток, то вы можете воспользоваться функцией `eulersplot`

³Если вы не делали задачу данного доплистка, то вы можете модифицировать программу `eulersplot` из семинара.