Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год
Дифференциальные уравнения
Дополнительный листок К1. Метод Ру́нге—Ку́тты (21 марта 2014 г.)
И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Замечание 1. *Данный дополнительный листочек разделен на три части: Обоснование численных методов 1, их Реализация 2 и Приложения 3. Части независимы друг от друга, можно решать только отдельные интересующие задачи или темы.*

1 Обоснование численных методов

Замечание 2. *Здесь и далее мы будем рассматривать дифференциальное уравнение*

$$y'(x) = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Напоминание. Метод Эйлера приближенно решает дифференциальное уравнение, используя следующую индукционную формулу. Алгоритм стартует из данного начального условия $y(x_0) = y_0$, дальшие шаги определяются по формуле:

$$x_{i+1} = x_i + h;$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$

где h — какое-то маленькое число (*шаг*).

Задача 1 (Метод Эйлера). (a) Рассмотрим решение дифференциального уравнения $y(x)$. Запишите разложение функции $y(x)$ в ряд Тейлора с двумя членами (до линейного члена) в некоторой точке x_i. При записи замените $y'(x)$ на соответствующую функцию из дифференциального уравнения. Аппроксимирующую функцию назовем $\tilde{y}_{x_i}(x)$. Какова ошибка разложения $(y(x) - \tilde{y}_{x_i}(x))$ в терминах $O((x - x_i)^n)$? (Иными словами, требуется найти такое максимальное n, что $y(x) - \tilde{y}_{x_i}(x) = O(x - x_i)^n$.)

(b) Запишите $\tilde{y}_{x_i}(x_i + h)$ для некоторого h. Какова ошибка разложения в терминах $O(h^n)$?

(c) Пусть $\hat{y}_h(x)$ — кусочно-линейная функция, принимающая в точках x_i значения y_i, вычисленные по методу Эйлера с шагом h. Эта функция приближает истинное решение $y(x)$ дифференциального уравнения, её графиком является ломаная, проходящая через точки (x_i, y_i). Зафиксируем какое-нибудь $x > x_0$. Найти такое максимальное n, что $y(x) - \hat{y}_h(x) = O(h^n)$. (В этом случае говорят, что метод имеет *сходимость* порядка $O(h^n)$.) Здесь следует учесть, что с уменьшением h потребуется сделать больше шагов, чтобы достигнуть точки x.

Задача 2 (Метод Рунге—Кутты второго порядка (RK2)). (a) Рассмотрим решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1). Запишите разложение функции $y(x)$ в ряд Тейлора с тремя членами (до квадратичного включительно) в точке x_i. При записи замените $y'(x)$ на соответствующую функцию из дифференциального уравнения. Назовем получившуюся функцию $\tilde{y}_{x_i}(x)$ Какова ошибка разложения в терминах $O(x - x_i)$?

(b) Выразите $y''(x)$ через частные производные $f(x, y)$. Указание: продифференцируйте уравнение (1) и используйте теорему о производной сложной функции.

(c) Запишите $\tilde{y}_{x_i}(x_i + h)$, подставив $y''(x)$ из 2b. Какова ошибка разложения в терминах $O(h^n)$?

(d) Вспомнив разложение функции нескольких переменных в ряд Тейлора, запишите выражение $f(x + h, y + k)$ с точностью до линейных членов. Выразите $f(x + h, y + k) - f(x, y)$.

(e) Пусть теперь $k = h \cdot f(x, y)$. Подставьте получившееся выражение в разложение из пункта 2c таким образом, чтобы избавиться от частных производных функции f.

(f) Запишите получившийся алгоритм в виде $y_{n+1} = y_n + h(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, а g_1, g_2 — значения функции f в некоторых точках. Данная формула задает метод Рунге—Кутты второго порядка.

(g) Какой порядок сходимости имеет данный метод (в терминах $O(h^n)$)? Сравните со сходимостью метода Эйлера.

2 Реализация

Задача 3 (RK2: алгоритм). (a) Напишите функцию `RK2plot(f,xa,xb,ya,n)`, подобную функции `eulersplot`, которую мы делали на семинаре 04.02.2014. Если вы пропустили его, то вы можете найти код в исходниках второй лекции. Напоминаем смысл: необходимо построить численное решение методом Рунге—Кутты дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на промежутке $[xa, xb]$ с начальным условием $y(xa) = ya$, сделав n шагов.

(b) Решите аналитически дифференциальное уравнение $y' = -x \cdot e^y$.

(c) Постройте решение уравнения из 3b с одним и тем же начальным условием двумя различными методами: методом Эйлера и методом Рунге—Кутты второго порядка. В каждом из методов используйте одно и то же количество шагов. Постройте на том же графике истинное решение уравнения из той же точки.

Пропустим метод Рунге—Кутты третьего порядка из-за того, что общемировой практикой является использование метода четвертого порядка.

Замечание 3. *Введем метод Рунге—Кутты четвертого порядка. Пусть*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4\right), \\ g_1 &= h \cdot f(x_n, y_n), \\ g_2 &= h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2} g_1), \\ g_3 &= h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2} g_2), \\ g_4 &= h \cdot f(x_n + h, y_n + g_3). \end{aligned}$$

Этот метод, по аналогии с другими методами Рунге—Кутты, имеет порядок ошибок в $O(h^5)$ на каждом шаге (общая ошибка, таким образом, составляет $O(h^4)$).

Задача 4 (RK4: алгоритм). Напишите функцию `RK4plot(f,xa,xb,ya,n)`, реализующие метод Рунге—Кутты четвертого порядка, по аналогии с `RK2plot`.

Задача 5 (Сравнение ошибок). (a) Решите уравнение $\dot{y} = -\frac{x}{2y}$ с начальным условием $y(0) = 3$.

(b) Найдите $y(2{,}5)$.

(c) Модифицируйте свои программы из 3a,4 и **eulersplot** таким образом, чтобы они возвращали значение аппроксимизируемой функции в точке `xb`. Самостоятельно разберитесь с конструкцией `return`.

(d) Сравните абсолютную ошибку ($|y(2,5) - \hat{y}_h(2,5)|$, где $\hat{y}_h(x)$ — это аппроксимизация с шагом h) трех методов (Эйлера, RK2 и RK4) при различных значениях h. Пусть n — число шагов (тогда $h = (xb - xa)/n$). Для каждого n рассчитайте величину ошибки каждого из трех методов. Постройте график, сравнивающий ошибки: по оси X – n, по оси Y – ошибка.

(e) Сравните скорость сходимости методов.

3 Приложения

Задача 6 (Уравнение Рикатти). Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = x^2 + 2y - 10x + 10$.

(a) Постройте поле направлений этого дифференциального уравнение.

(b) Постройте интегральные кривые для $y(0) = -4, -3, -2$. Исследуйте графически их поведение на $t \to +\infty$ и на $t \to -\infty$.

(c) Найдите с точностью до трех знаков после запятой значение $y(0)$ при котором происходит *фазовый переход*, то есть (в данном случае) меняется предельное поведение траекторий на $t \to +\infty$. Назовем это значение α.

(d) Исследуйте предельное поведение решения дифференциального уравнения при $y(0) \to \alpha-$? $y(0) = \alpha$? $y(0) \to \alpha+$?

Задача 7 (Модель Рамсея)**.** [1, 2]

В этой задаче используются обозначения с семинара 8 курса “Macroeconomics” осеннего семестра 2013 ВШЭ и РЭШ [2]. Выпуск (Y) зависит от запаса капитала (K), численности занятых (L) и параметра технологии (A): $Y = K^{\frac{1}{3}}(AL)^{\frac{2}{3}}$. Функция полезности, зависящая от потребления (C), такова, что эластичность замещения θ постоянна и равна 1. Нормируем уровень технологии A к 1. Численность занятых равна 8, рост населения отсутствует. Норма амортизации капитала δ составляет 3%, субъективная норма межвременных предпочтений ρ равна 0,01.

(a) Напишите автономное дифференциальное уравнение, задающее динамику потребления и капиталовооруженности. Коротко сформулируйте интуицию каждого из уравнений.

(b) Напишите неавтономное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению из 7a. Попробуйте его решить. При любых успехах обращайтесь в Нобелевский комитет – его пока не удалось решить аналитически. ☺

(c) Постройте[1] изоклины $\dot{c} = 0$ и $\dot{k} = 0$ в осях (K, C). Рассчитайте исходное стационарное состояние: запас капитала, объем выпуска, объем потребления. Есть ли другие стационарные состояния?

(d) Пусть в какой-то момент времени запас капитала равен $k = 10$. Прокомментируйте динамику потребления и капиталовооруженности для $c = 10$; $c = 40$ на фазовом портрете системы.

(e) Модифицируйте программу `RK4plot`[2], чтобы она работала с двумерными векторами. Метод Рунге—Кутты в многомерном случае определяется так же, как и в одномерном, просто теперь мы работаем с векторами. (Можно использовать тип `array` из пакета `numpy`.) Постройте фазовые кривые для $k = 10$ и $c = 10$; $c = 20$; $c = 30$, $c = 40$.

(f) Найдите (численно, с точностью до двух знаков после запятой) такое значение потребления при $k = 10$, что экономика попадает в стационарное состояние из 7c.

(g) Для всех целых значений капитала от 1 до 400 найдите значение потребления, приводящего к стационарному состоянию. Постройте график этой функции на векторном поле, дополнив его изоклинами из 7c.

(h) Пусть экономика находилась в стационарном состоянии, когда норма амортизации внезапно и навсегда возросла до 5%. Постройте изоклины до и после изменения, найдите потребление, которое приведет к равновесию в экономике. Покажите на графике общую траекторию экономики.

(i) Пусть экономика находилась в стационарном состоянии (в момент времени $t = 0$), когда поступила информация о том, что норма амортизации увеличится до 5% в момент времени $t = 5$. Напомним, что теория сглаживания потребления утверждает, что в момент времени $t = 5$ не должно быть резких изменений в потреблении (иными словами функция временной динамики потребления должна быть непрерывной). Посчитайте уровень потребления, который необходимо установить фирме, чтобы попасть в новое стационарное состояние. Постройте тракеторию экономики на фазовом потрете (изобразите изоклины до и после изменения).

Список литературы

[1] О. Замулин, К. Сонин. *Макроэкономика.* Рукопись.

[2] E. Arbatli. *Macroeconomics.* Seminar 8. The Ramsey model. The OLG model. Fall 2013, Joint HSE&NES program.

[1] Будьте внимательны при записывании функций в программу! Скорее всего вам придется явно задать, что все операции выполняются **с дробными числами**.

[2] Если вы не делали задачу 4, то вы можете модифицировать программу `eulersplot` из семинара.