

Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год

Теория вероятностей

Дискретные случайные величины: отрицательное биномиальное распределение  
(20 ноября 2013)

И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

**Определение 1.** Рассмотрим монетку, у которой орёл выпадает с вероятностью  $p$ . Будем подбрасывать её до тех пор, пока орёл не выпадет в  $r$ -й раз. Пусть  $X$  — количество решек, выпавших до этого момента. Величина  $X$  в этом случае имеет *отрицательное биномиальное распределение* с параметрами  $(p, r)$ .

**Пример 1.** Если мы получили такую последовательность подбрасываний: ОРРОРРОРО... и  $r = 3$ , то  $X = 4$ .

**Задача 1.** Найти распределение случайной величины  $X$  для

- (a)  $p = 1/2, r = 2$ .
- (b)  $p = 1/2, r = 3$ .
- (c) Произвольного  $p$  и  $r$ .

**Определение 2.** Напомним, что количество решек, выпавших до первого выпадения орла, называется случайной величиной с геометрическим распределением.

**Задача 2.** Покажите, что если  $X$  — случайная величина, имеющая отрицательное биномиальное распределение с параметрами  $(p, r)$ , то  $X = Y_1 + \dots + Y_r$ , где  $Y_1, \dots, Y_r$  — независимые геометрические случайные величины с вероятностью успеха  $p$ .

**Задача 3.** Пользуясь правилом о сложении матожиданий, найдите  $EX$ , где  $X$  — случайная величина, имеющая отрицательное биномиальное распределение с параметрами  $(p, r)$ .

**Задача 4** (Задача адаптирована из лекций по курсу 18.440 Probability and Random Variables, MIT OCW). У ребёнка есть карточки с буквами русского алфавита от «А» до «Я» (всего 32 карточки). Он играет в такую игру: выбирает случайную карточку и выписывает на бумажку букву, которая на неё написана. Затем карточка возвращается в набор, все карточки перемешиваются, через минуту снова выбирается случайная, и т.д. далее процесс продолжается (потенциально — до бесконечности). За каждую минуту выписывается по одной букве.

- (a) Сколько в среднем гласных букв он выпишет с 5-й по 9-ю минуту включительно?
- (b) Какова вероятность, что первые 4 буквы будут согласными, а 5-я гласной?
- (c) Какова вероятность, что буквы с 7 по 11-ю включительно будут согласными, а 12-я гласной?
- (d) Какова вероятность, что третья гласная буква (от начала слова) будет находиться на 7-м месте?
- (e) Сколько минут нужно в среднем подождать от начала игры до появления четвертой гласной буквы? Сколько согласных будет выписано перед этим?
- (f) Сформулировать ответы на предыдущие вопросы в терминах случайных величин, указать их распределения.