

Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год

Теория вероятностей

Дискретные случайные величины: биномиальное распределение (13 ноября 2013)

И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

Определение 1. Случайная величина X распределена геометрически с вероятностью успеха p , если

$$P(X = k) = q^{k-1}p,$$

где $q = 1 - p$.

Задача 1. У меня в кармане две монетки — одна нормальная, а другая с двумя орлами. Я достаю случайную монетку и подбрасываю её. Если выпала решка, я прекращаю подбрасывание, а если орёл, возвращаю монетку в карман и продолжаю процесс. Случайная величина X — число выпавших орлов до первого выпадения решки.

- Какие значения может принимать X ?
- Чему равняется $P(X = 0)$? $P(X = 1)$? $P(X = k)$ для произвольного k ?
- Показать, что эта случайная величина распределена геометрически. Найти, чему равняется p и q .
- Найти математическое ожидание этой случайной величины.
- Чему равняется $P(X < 4)$?
- Чему равняется $P(X > 3)$?
- (*) Чему равняется $P(X > 5 | X > 2)$ (то есть вероятность того, что X оказалось больше 5, при условии, что $X > 3$)?
- Построить график распределения случайной величины X для значений до 5.
- Что поменяется, если мы наоборот, будем подбрасывать монетку до выпадения первого орла?

Определение 2. Пуассоновской случайной величиной с показателем λ называется случайная величина X , распределенная по следующему закону:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Задача 2. Найти математическое ожидание случайной величины, распределенной по Пуассону с параметром λ .

Задача 3. (*) Доказать, что дисперсия случайной величины, распределенной по Пуассону, равна λ .

Задача 4. В ходе исследования вопроса об авторстве «Федералиста» (сборник статей в поддержку ратификации Конституции США) использовались статистические методы [Mosteller and Wallace (1984, 2.3)]: в частности, подсчёт частотности вхождения тех или иных слов. Для сравнения был взят длинный текст, принадлежащий перу Александра Гамильтона. Его разбили на большое количество фрагментов примерно одинаковой длины. Выбрали случайный фрагмент и посчитали, сколько раз в нём встречается слово «anu». Оказалось, что полученная случайная величина распределена по Пуассону¹ с параметром $\lambda = 0.67$.

¹Вообще говоря, число частотность слов далеко не всегда распределена по Пуассону, но в данном случае это оказалось так.

- (a) С какой вероятностью в выбранном фрагменте слово «апу» встречалось три раза?
- (b) Сколько в среднем раз встречалось слово «апу» в фрагменте?
- (c) С какой вероятностью в фрагменте встретилось меньше трёх слов «апу»?
- (d) Построить график распределения до значения равного 4.