Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год
Дискретная математика
Задачи по теории вероятностей, часть 2 (22.11.2013)
Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, К. Г. Куюмжиян, Р. Я. Будылин

Условная вероятность

Определение 1. *Условной вероятностью* $P(A|B)$ события A при условии B называется отношение вероятности пересечения $A \cap B$ к вероятности события B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Если все элементарные исходы равновероятны, то эта вероятность равна отношению количества исходов, благоприятных обоим событиям, к количеству исходов, благоприятных событию B:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Задача 1. Монетку подбросили два раза. Событие A — выпадение хотя бы одной решки, событие B — выпадение орла при первом подбрасывании монетки.

(a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.
(b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B.
(c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно.
(d) Найдите вероятность события AB.
(e) Найдите вероятность события A при условии B.

Задача 2. Игральный кубик подбросили два раза. Событие A — выпадение в первый раз четвёрки, событие B — выпадение восьми очков в сумме за два раза.

(a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.
(b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B.
(c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно
(d) Найдите вероятность события AB.
(e) Найдите вероятность события A при условии B.

Задача 3. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — выпадение орла в четвёртый раз, событие B — выпадение трёх орлов в первые три подбрасывания.

(a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.
(b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B.
(c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно.
(d) Найдите вероятность события AB.
(e) Найдите вероятность события A при условии B.

Замечание 1. *Заметим, что из определения условной вероятности следует равенство:*

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

Таким образом, если известна вероятность события A и вероятность события B при условии A, можно найти вероятность их пересечения.

Задача 4. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребёнок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой.

(a) Какова вероятность, что первой буквой он вытащит букву «Т»?
(b) Какова вероятность, что второй буквой он вытащит букву «О»?
(c) Какова вероятность, что второй буквой он вытащит букву «О» при условии, что первой буквой он вытащил «Т»?
(d) Какова вероятность, что первые две буквы будут «ТО»?
(e) Используя результаты предудщих пунктов и продложая в том же духе, решить другим методом задачу из предыдущего листка: Если ребёнок берет 3 карочки, какова вероятность, что получится слово «ТОР»?
(f) Если ребёнок берет все 6 карточек, какова вероятность, что получится слово «ТЕОРИЯ»?

Зависимость событий

Определение 2. События A и B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие, то есть вероятность события A равна вероятности события A при условии B, а вероятность события B равна вероятности события B при условии A:

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

Задача 5. Монетку подбросили два раза. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, то есть выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Все элементарные исходы мы считаем равновероятными. Зависимы ли события A — (выпадение орла в первый раз) и B — (выпадение орла во второй раз)?

Задача 6. Зависимы ли события A и B

(a) из задачи 1;
(b) из задачи 2;
(c) из задачи 3;

Задача 7. На факультете филологии девушек учится больше, чем юношей, а на факультете математики наоборот — юношей больше, чем девушек. На общеуниверситетский факультатив пришли все студенты с факультета математики и филологии (и больше никого). Среди них выбрали случайного студента. Событие A — выбранный студент учится на факультете математики. Событие B — выбранный студент — девушка. Являются ли эти события независимыми?

Теорема 8 (Теорема сложения вероятностей)**.** *Для любых двух событий A и B вероятность того, что хотя бы одно из событий произойдёт равна сумме вероятностей событий A и B минус вероятность их одновременного выполнения.*

Задача 9. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — (выпало не меньше трёх орлов), событие B — (выпала хотя бы одна решка).

(a) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию A и найти его вероятность.

(b) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию A и найти его вероятность.
(c) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A+B$ (выполняется хотя бы одно из событий A и B) и найти его вероятность.
(d) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию AB (оба события A и B выполняются) и найти его вероятность.
(e) Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.

Задача 10. В колоде 36 карт. Случайным образом выбирают одну карту. Событие A — (выбрали туза), событие B — (выбрали пиковую карту).
(a) Найти вероятности событий A и B.
(b) Какие элементарные исходы благоприятны событию AB? Найти вероятность этого события.
(c) Какие элементарные исходы благоприятны событию $A+B$? Найти вероятность этого события.
(d) Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.

Задача 11. Игральный кубик подбросили два раза. Событие A — в первый раз выпало чётное число очков. Событие B — в сумме за два подбрасывания выпало больше 5 очков.
(a) Найти вероятности событий A и B.
(b) Какие элементарные исходы благоприятны событию AB? Найти вероятность этого события.
(c) Какие элементарные исходы благоприятны событию $A+B$? Найти вероятность этого события.
(d) Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.

Теорема 12 (Теорема умножения вероятностей)**.** *Для двух* независимых *событий A и B вероятность того, что оба события произойдут одновременно равна произведению вероятностей событий A и B.*

Замечание 2. *Это утверждение мгновенно следует из замечания 1.*

Задача 13. Монетку со смещенным центром тяжести подбросили два раза. Выпадение орла в первый раз и выпадение орла во второй раз будем считать независимыми событиями. При каждом подбрасывании выпадение орла считаем вдвое более вероятным, чем выпадение решки. Найти вероятности всех возможных исходов (РР, РО, ОР, ОО) в двух бросках.

Задача 14. Монетку подбросили пять раз. Выпадение орла в любой раз и выпадение орла в любой другой раз будем считать независимыми событиями, выпадение орла и решки при каждом броске считаем равновероятными. Перечислить все возможные исходы в пяти бросках, найти вероятность каждого. Как изменится ответ, если взять монетку со смещенным центром тяжести из предыдущей задачи?

Задача 15. Придумать такие события A, B, C, что они попарно независимы, но $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Задача 16. Преподаватель предложил студентам угадать результат пятикратного подбрасывания честной монетки (вероятность выпадения орла и решки одинаковая).

(a) Какова вероятность, что конкретный студент угадает верно результаты всех пяти подбрасываний? Какова вероятность, что не угадает результат хотя бы одного подбрасывания?
(b) Какова вероятность, что два студента, действующие независимо друг от друга, не угадают результаты всех пяти подбрасываний (хоть где-то каждый из них ошибётся)?
(c) Какова вероятность, что никто из 70 студентов, находищсях в аудитории, не угадает (при условии, что студенты не советуются и не списывают друг у друга)?
(d) Какова вероятность, что хотя бы один из 70 студентов угадает?
(e) Все студенты сговорились и записали одно и то же предсказание. Какова вероятность, что никто не угадает в этом случае? Почему ответ отличается от ответа на предыдущий пункт?
(f) В одной из групп было 32 студента. Они договорились, что все напишут различные предсказания. Какова вероятность, что хоть кто-то угадает? Почему ответ отличается от ответа на вопрос пункта 16d?

Задача 17 (Statistics. — 3rd ed. / D. Freedman, R. Pisani, R. Purves. 1991)**.** В судебном деле *People v. Collins* рассматривалось ограбление. Обвиняемыми были чернокожий мужчина и белая женщина. Свидетели дали несколько характеристик потенциальных преступников, которые совпадали с характеристиками обвиняемых. Приглашенный стороной обвинения математик оценил вероятность того, что каждое из таких совпадений случайно, составив следующую таблицу:

Желтый автомобиль	1/10
Мужчина с усами	1/4
Женщина с хвостиком	1/10
Женщина-блондинка	1/3
Черный мужчина с бородой	1/10
Пара мужчины и женщины разного цвета кожи в машине	1/1000

Затем математик перемножил вероятности и получил, что вероятность случайного совпадения всех характеристик равна 1/12000000. Присяжные согласились с тем, что эта вероятность очень маленькая, случайное совпадение практически исключено, и значит подсудимые виновны.

В чем состояла ошибка в указанном рассуждении?