Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год
Дискретная математика
Задачи по теории вероятностей, часть 1 (15.11.2013)
Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, К. Г. Куюмжиян, Р. Я. Будылин

Задача 1. Игральный кубик бросили один раз. Перечислить элементарные исходы, благоприятные следующим событиям.
(a) на кубике выпала шестёрка
(b) на кубике выпало количество очков, меньшее двух
(c) на кубике выпало чётное количество очков
(d) на кубике выпало больше трёх очков
(e) на кубике выпало семь очков

Задача 2. Монетку подбросили два раза. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Значит, элементарные исходы в этом испытании такие: Решка-Решка, Решка-Орёл, Орёл-Решка, Орёл-Орёл. Мы будем для краткости обозначать их РР, РО, ОР, ОО. Являются ли событиями в этой системе элементарных исходов такие происшествия:
(a) выпало два орла
(b) в первый раз выпал орёл
(c) выпала хотя бы одна решка
(d) орёл не выпадал ни разу
(e) орёл выпадал в большем количестве случаев, чем решка
Для тех происшествий, которые являются событиями, перечислите элементарные исходы, им благоприятные.

Задача 3. Рассмотрим следующие ситуации:
(a) Монетку подкидывают 5 раз. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Сколько элементарных исходов в этом испытании?
(b) А если монетку подкидывают 6 раз?
(c) Из стандартной колоды игральных карт вытаскивают случайную карту, записывают её масть, и возвращают карту в колоду. Потом колоду перемешивают, еще раз вытаскивают случайную карту и снова записывают её масть. Сколько элементарных исходов в этом испытании?
(d) А если это происходит не 2 раза, а 5 раз?

Задача 4. Рассмотрим следующее случайное испытание: монетка подкидывается четыре раза. Нас интересует, какой стороной вверх она падала: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Какой будет система элементарных исходов? Какие из следующих происшествий являются событиями в этой системе исходов? Для тех происшествий, которые являются событиями, перечислить, какие элементарные исходы им благоприятствуют.
(a) В первый раз выпал орел.
(b) Во второй раз выпала решка.
(c) В первый раз выпал орел, а во второй раз выпала решка.
(d) В первый раз выпал орел, а после третьего бросания монетка погнулась.
(e) Все четыре раза монетка выпала одной и той же стороной.
(f) В первый раз выпало не то, что в четвертый, а во второй — не то, что в третий.
(g) Монетка зависла в воздухе на четвертое бросание.

Задача 5. В условиях задачи 4 определим события A и B. Перечислить элементарные исходы, благоприятствующие событиям A, B, $A \cap B$, $A \cup B$:
(a) A=«Выпала хотя бы одна решка», B=«Выпало ровно пять орлов»
(b) A=«При первом бросании выпал орел», B=«При втором бросании выпала решка»
(c) A=«Выпал хотя бы один орел», B=«Выпало ровно три решки»
(d) A=«Выпало меньше двух орлов», B=«Орлов выпало больше, чем решек».

Задача 6. Стандартный игральный кубик подкинули два раза. Нас интересует, сколько очков выпадало на кубике, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала шестёрки, потом единички мы отличаем от выпадения сначала единички, а потом шестёрки. Пусть событие A — в первый раз выпало пять очков, событие B — хотя бы раз выпадало чётное количество очков. Опишите элементарные исходы, удовлетворяющие

(a) событию AB (оба события произошли)
(b) событию $A + B$ (произошло хотя бы одно из событий).

Определение 1. Мы будем говорить, что два события *равновероятны*, если нет никаких объективных причин считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

Определение 2. Если все элементарные исходы равновероятны, то вероятностью $p(A)$ события A называется отношение количества благоприятных исходов к общему количеству элементарных исходов.

Задача 7. Найти вероятности всех событий, фигурировавших в предыдущих задачах.

Задача 8. Монетку подкинули три раза. Что вероятнее — выпадение трёх орлов, или выпадение орла, затем решки, затем орла?

Задача 9. Рассмотрим эксперимент по той же схеме, что в задаче 4. Перед началом эксперимента Иван Иванович записал на листе бумаги результаты нескольких бросаний, указывая номер бросания и предсказанный исход (например, «Во второе бросание выпадет решка, а в третье бросание — орёл»). Иван Иванович выиграл, если сбылись все предсказания, записанные им на листе. С какой вероятностью Иван Иванович выиграет, если он предсказал результат:

(a) только первого бросания;
(b) только четвертого бросания;
(c) первого и третьего бросания;
(d) второго и четвертого бросания;
(e) трех каких-то бросаний;
(f) всех четырех бросаний?

Задача 10. Одновременно бросаются два одинаковых (неразличимых) игральных кубика с шестью гранями. Вычислить вероятности следующих событий:

(a) На одном кубике выпало 5, а на другом — 6.
(b) На обоих кубиках выпало 3.
(c) Сумма выпавших очков равна 1.
(d) Сумма выпавших очков равна 2.
(e) Сумма выпавших очков равна 3.
(f) Сумма выпавших очков больше 3.
(g) Выпало два четных числа.

Задача 11. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребёнок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой.

(a) Если ребёнок берет 3 карочки, какова вероятность, что получится слово «ТОР»?
(b) Если ребёнок берет все 6 карточек, какова вероятность, что получится слово «ТЕОРИЯ»?

Задача 12. На столе лежат три карточки с буквой «А», две карточки с буквой «Н» и одна карточка с буквой «С». Какова вероятность, что ребёнок из предыдущей задачи соберет из них слово «АНАНАС»?

Задача 13. В корзине пять красных и четыре зеленых шара. Наугад вытащили три шара. (После извлечения шара из корзины он откладывается в сторону и назад в корзину не возвращается.) Какова вероятность, что все три шара окажутся

(a) красными?
(b) зелеными?
(c) синими?

Задача 14. В корзине семь красных и три зеленых шара. Наугад вытащили 4 шара. Какова вероятность, что среди них есть два красных и два зеленых шара?

Задача 15. В аудитории 25 студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух студентов дни рождения совпадают. При каком числе студентов вероятность того же события не меньше, чем 0.95? (Мы полагаем для простоты, что человек может родиться в любой день года с равной вероятностью — хотя, строго говоря, это не вполне верно.)