Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год
Дискретная математика
Математическая индукция (11 октября 2013)
Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, К. Г. Куюмжиян, Р. Я. Будылин

Напоминание: принцип математической индукции. Пусть нам надо доказать последовательность утверждений: $P(1)$, $P(2)$, $\ldots$. Тогда достаточно доказать следующее:

- Первое утверждение ($P(1)$) верно.
- Для каждого n если утверждение $P(n-1)$ верно, то и утверждение $P(n)$ верно.

Задача 1. Используя метод математической индукции, аккуратно докажите, что
(a) k человек можно выстроить в ряд $k!$ различными способами.
(b) В алфавите из n букв существует ровно n^k различных слов длины k.
Сформулируйте и докажите явно базу индукции и индуктивный переход (шаг индукции).

Задача 2. Постройте треугольник Паскаля до 10-й строки включительно.

Задача 3. С помощью треугольника Паскаля найти C_{11}^4, C_{12}^5.

Задача 4. Докажите, что для любого n выполняется тождество

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0;$$

Задача 5. Используя тождество $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, докажите с помощью метода математической индукции, что

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Задача 6. Найдите ошибку в рассуждении.

Утверждение. В любом стаде все коровы одного цвета.

Доказательство. Индукция по числу коров. База (стадо из одной коровы) очевидна, докажем шаг. Возьмем в стаде из $N+1$ коровы произвольную корову A. Оставшиеся N коров одного цвета. Теперь возьмем другую корову B. Оставшиеся N коров также одного цвета. В частности, A одного цвета со всеми коровами, кроме A и B — но и B одного цвета со всеми этими коровами. Значит, все коровы в стаде одного цвета.

Задача 7. Найдите ошибку в рассуждении.

Утверждение. Если в стране из каждого города выходит хотя бы одна дорога, то из любого города можно попасть в любой другой.

Доказательство. Индукция по числу городов. База (страна из двух городов) очевидна, докажем шаг. Возьмем какую-нибудь страну из n городов и добавим к ней новый город (с выходящей из него дорогой). Между старыми городами можно проехать по старым дорогам, так что достаточно доказать, что из нового города можно добраться в любой из старых. Дорога из этого города ведет в один из старых городов. Следовательно, из него можно доехать в один из старых городов, а оттуда уже добраться до любого другого. Итак, в новой стране тоже можно из любого города доехать до любого другого.

Задача 8. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что можно так покрасить части, на которые оказалась разбита плоскость, в два цвета, чтобы соседние (по стороне) области были покрашены в разные цвета.

Задача 9. (*)

На какое наибольшее число частей могут делить плоскость n прямых?

Задача 10. Докажите равенства и неравенства:

(a) $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) $1 \cdot 2 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

(c) $1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(d) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

(e) $2^n > n$.

Задача 11. Докажите формулу *бинома Ньютона*:

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n$$

Задача 12. С помощью бинома Ньютона докажите тождества

(a) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;

(b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$;