

Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год

Дискретная математика

Комбинаторика 2 (27 сентября 2013)

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, К. Г. Куюмжиян, Р. Я. Будылин

Задача 1. В меню первое блюдо можно выбрать 17 способами, а второе — 16 способами. Сколькими способами можно выбрать обед из такого меню?

Задача 2. Сколько диагоналей (отрезков, соединяющих вершины, но при этом не являющихся сторонами) можно провести в правильном 17-угольнике?

Задача 3. Из города A в город B ведут 3 дороги, из города B в город C ведут 4 дороги, из города C в город D ведут 4 дороги. Других дорог нет. Сколькими способами можно проехать из города A в город D ?

Задача 4. В связи с проведением в городе C олимпиады, построили ещё одну дорогу из города A в город B , а также четыре дороги, ведущие из города A в город C напрямую. Сколькими способами можно проехать из города A в город C теперь?

Определение 1. *Словом* мы будем называть любую последовательность букв, выбранных из некоторого алфавита. Слово не обязано быть «осмысленным». Алфавит — это любой набор символов, не обязательно реально существующий алфавит какого-то языка.

Задача 5. Сколько существует слов в алфавите $\{a, b, c, d\}$, состоящих из

- (а) одной или двух букв?
- (б) двух или трёх букв?
- (с) одной, двух или трёх букв?

Задача 6. Жители страны Анаграмии используют алфавит из четырёх букв $\{a, b, c, d\}$, но используют только слова, в которых все буквы различны. Все такие слова являются осмысленными в языке этой страны. При этом любые два слова, отличающиеся только порядком букв, являются синонимами. Ни в каком другом случае два слова синонимами не являются.

- (а) Сколько синонимов есть у слова a ?
- (б) Сколько синонимов есть у слова ab ?
- (с) Сколько различных (по смыслу) слов можно составить из двух букв?
- (д) Сколько синонимов есть у слова abc ?
- (е) Сколько различных (по смыслу) слов можно составить из трёх букв?
- (ф) Сколько синонимов есть у слова $abcd$?
- (г) Сколько различных (по смыслу) слов можно составить из четырёх букв?

Задача 7. (*) В Москве 7 высотных зданий. Если смотреть на них издалека, они в каком-то порядке располагаются на линии горизонта. Если смотреть из разных точек, будут разные способы расстановки. Турист едет по московской кольцевой автодороге и постоянно смотрит на высотки. Увидит ли он все возможные расстановки высоток, когда завершит круг?

Задача 8. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове

- | | |
|-----------------|---------------|
| (a) КРОНА? | (e) ААББББББ? |
| (b) КОРОВА? | (f) АААБББББ? |
| (c) МАТЕМАТИКА? | (g) ААААББББ? |
| (d) АБББББББ? | (h) АААААБББ? |

Задача 9. Сколькими способами можно выбрать

- (a) Одного человека из восьми?
- (b) Двух человек из восьми?
- (c) Трёх человек из восьми?
- (d) Четырёх человек из восьми?
- (e) Пять человек из восьми?
- (f) Восемь человек из восьми?
- (g) k человек из n человек?

Определение 2. Ответ на последний пункт предыдущей задачи называется *биномиальным коэффициентом* или *числом сочетаний из n по k* , обозначается C_n^k .

Задача 10. (a) Сколькими способами можно выбрать 4 человек из 10?

- (b) Сколькими способами можно выбрать 6 человек из 10?
- (c) В городе Нью-Васюки все улицы — прямые, и причем любые две улицы либо параллельны, либо пересекаются под прямым углом, а сам город имеет форму прямоугольника, длиной в 6 кварталов и шириной в 4 квартала. Сколькими способами можно пройти из левого нижнего угла в правый верхний, двигаясь только по улицам и только вверх и вправо?
- (d) Почему ответы на все эти пункты совпадают?
- (e) В городе Нью-Васюки сменился мэр, после чего к нему присоединили часть нью-васюковской области. В результате город сохранил свою планировку, но стал иметь форму прямоугольника со сторонами l и m кварталов. Сколькими способами теперь можно пройти из левого нижнего угла в правый верхний?

Задача 11. В правом верхнем углу города Нью-Васюки (длиной l кварталов и шириной m кварталов) находится телеграф. Ровно на один квартал ниже его находится библиотека. Ровно на один квартал левее телеграфа находится банк. Сколькими способами можно добраться из левого нижнего угла до

- (a) библиотеки?
- (b) банка?
- (c) телеграфа?
- (d) Доказать формулу $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.
- (e) Доказать формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Задача 12. Сколькими способами можно выбрать

- (a) Одного человека из пяти?
- (b) Двух человек из пяти?
- (c) Трёх человек из пяти?
- (d) Четырёх человек из пяти?
- (e) Пять человек из пяти?
- (f) Сколько-нибудь человек из пяти (может быть никого)?

Задача 13. Доказать равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n \quad (1)$$