Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год
Дискретная математика
Задачи по теории вероятностей, часть 5 (28 ноября 2011)
Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, К. Г. Куюмжиян, Р. Я. Будылин

Дискретные случайные величины

— Кто возьмет билетов пачку, тот получит...
— Водокачку!..

к/ф «Бриллиантовая рука»

Определение 1. Величина x, значение которого зависит от результата некоторого случайного испытания, называется *случайной величиной*. Случайная величина, принимающая одно из конечного множества значений, называется *дискретной случайной величиной*. Дискретная случайная величина полностью задается своим *рядом распределения*, то есть таблицей, в которой указывается, с какой вероятностью принимается каждое из значений.

Задача 1. Рассмотрим случайное испытание: монетка подбрасывается 4 раза. (Мы будем записывать элементарные исходы как последовательности из четырех символов «О» или «Р»). Пусть случайная величина k — это количество выпавших орлов.

(a) Пусть в испытании реализовался исход «ОООО». Чему равно в этом случае k?
(b) А если в испытании реализовался исход «РРРР»?
(c) При каких исходах k=0?
(d) При каких исходах k=1?
(e) Перечислить все возможные исходы и соответствующие значения случайной величины k.
(f) Какова вероятность, что k=0?
(g) Какова вероятность, что k=1?
(h) Для всех возможных значений k, найти вероятность его реализации. (То есть записать ряд распределения случайной величины k.)

Задача 2. Рассмотрим следующую лотерею: вероятность выиграть в ней равна 1/1000, сумма выигрыша равна 500 рублей. В случае проигрыша, игрок не получает ничего (выигрыш равен нулю). Пусть выигрыш — случайная величина x.

(a) Записать ряд распределения случайной величины x.
(b) Предположим, что вы играете в лотерею 100.000 раз. Сколько из них (примерно) вы выиграете?
(c) Сколько денег вы выиграете за 100.000 игр?
(d) Сколько денег вы в среднем будете выигрывать каждую игру? Изменится ли это число, если изменить число игр?

Определение 2. *Математическим ожиданием* случайной величины x (обозначается Ex или Mx) называется её «среднее значение» в расчете на одно испытание. «Средний выигрыш на одну игру», найденный в предыдущей задаче, и есть математическое ожидание.

Если случайная величина принимает значения $x_1,\ x_2,\ldots,x_k$ с вероятностями $p_1,\ p_2,\ldots,p_k$ соответственно, то математическое ожидание Ex вычисляется следующим образом:

$$Ex = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k$$

Задача 3. Рассмотрим лотерею из предыдущей задачи, но учтем теперь, что лотерейный билетик стоит 10 рублей. Пусть случайная величина y — это чистый выигрыш (то есть выигрыш минус стоимость билетика).

(a) Записать ряд распределения для случайной величины y.
(b) Сколько денег в среднем вы выиграете (с учетом стоимости билетов) за 100.000 игр?
(c) Сколько денег в среднем вы будете выигрывать в расчете на каждую игру? (Иными словами, чему равно математическое ожидание Ey?)
(d) Будете ли вы играть в такую лотерею?

Задача 4. Рассмотрим такую лотерею: в ней вероятность выиграть обычный приз (500 рублей) равна как и прежде $1/1000$, а вероятность выиграть супрприз (500.000 руб.) равна $1/1000.000$. Выиграть и то, и другое невозможно. Если вы ничего не выигрываете, то получаете утешительный приз в 10 рублей. Пусть z — выигрыш в этой лотерее (без учета стоимости лотерейного билета).

(a) Записать ряд распределения z.
(b) Найти математическое ожидание Ez? (Иными словами, средний выигрыш в расчете на одну игру.)
(c) Какую максимальную цену вы готовы заплатить за лотерейный билетик от такой лотереи?

Задача 5. Рассмотрим пару лотерей. В первой стоимость билетика составляет 1 рубль, вероятность выиграть равна $1/1000$, выигрыш равен 999 рублей. Во второй стоимость билетика составляет 100 рублей, вероятность выиграть равна $1/1000$, выигрыш равен 99.900 руб. Пусть слуайная величина x — чистый выигрыш в первую лотерею, случайная величина y — чистый выигрыш во вторую лотерею.

(a) Найти Ex и Ey.
(b) Чем отличаются эти лотереи? В какую бы из них вы скорее сыграли?

Определение 3. Зачастую нас интересует не только среднее значение величины, но и то, насколько сильно она может отклоняться от среднего значения, то есть *дисперсия* случайной величины. Вычисляется она так. Пусть x — случайная величина, Ex — её математическое ожидание. Тогда можно определить новую случайную величину: $\tilde{x} = x - Ex$. (Иными словами, если x принимает значение x_1, то $\tilde{x}$ в этом же случае принимает значение $x_1 - Ex$ и т.д.) Величина $\tilde{x}$ показывает, насколько сильно отклоняется случайная величина x от среднего значения, но при этом $\tilde{x}$ сама является случайной величиной. Мы бы хотели получить число. Естественная идея — рассмотреть математическое ожидание $\tilde{x}$. На практике, однако, вычисляют математическое ожидание квадрата $\tilde{x}$, то есть $E\tilde{x}^2 = E((X - EX)^2)$. Почему не просто $E\tilde{x}$, будет ясно из следующей задачи.

Задача 6. Рассмотрим случайные величины x и y из задачи 5.

(a) Записать ряды распределения x и y.
(b) Записать ряды распределения случайных величин $\tilde{x} = x - Ex$ и $\tilde{y} = y - Ey$.
(c) Вычислить математические ожидания $E\tilde{x}$ и $E\tilde{y}$.

(d) Вычислить дисперсии x и y, то есть математические ожидания $E\tilde{x}^2 = E(X - EX)^2$ и $E\tilde{y}^2 = E(Y - EY)^2$. У какой из величин дисперсия больше?

Задача 7. Вычислить дисперсии всех случайных величин, обсуждавшихся выше.