

Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год

Дискретная математика

Задачи на повторение материала третьего модуля (16 апреля 2014)

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, К. Г. Куюмжиян, Р. Я. Будылин

Задача 1. Существует ли граф, степени вершин которого равны 2, 3, 5, 7, 11, 13?

Задача 2. Существует ли граф, степени вершин которого равны 1, 1, 1, 2, 2, 2, 5?

Задача 3. Дима, приехав из Врунландии, рассказал, что там есть несколько озер, соединенных между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки и в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он ошибается.

Задача 4. В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро — братья.

Задача 5. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

Задача 6. Пусть предикат $P(x, y)$ проверяет, являются ли студенты x и y друзьями в социальной сети «Нет контакта», предикат $M(x)$ принимает значение «истина», если x — мужчина, предикат $L(x)$ проверяет, что студент x учится на отделении лингвистики филологического факультета НИУ УШУ.

- Запишите с помощью кванторов утверждение «Вася добавил в друзья в социальной сети „Нет контакта” всех девушек с отделения лингвистики филфака НИУ УШУ».
- Что означает утверждение $\forall x \exists y L(x) \wedge L(y) \Rightarrow ((M(x) \neq M(y)) \wedge P(x, y))$?

Задача 7. Рассмотрим предикаты $P(x, y) = \langle x \text{ — родитель } y \rangle$ и $M(x) = \langle x \text{ мужского пола} \rangle$.

- Запишите при помощи этих предикатов и кванторов предикат « x и y — двоюродные братья».
- Запишите формулой отрицание к утверждению из предыдущего пункта.
- Что означает формула $\exists y P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge (x \neq z)$?

Задача 8. Для всех ли значений A, B, C верна формула

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))?$$

Задача 9. Вася сказал Пете: «Если я сегодня хорошо сдам коллоквиум или завтра будет хорошая погода, то я завтра пойду гулять в парк». На следующий день, встретив Васю в парке, Петя сделал вывод, что коллоквиум сдан хорошо. Обязательно ли он прав?

Задача 10. Придумайте логическую формулу, таблица истинности которой имеет вид:

A	B	??
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Задача 11. Верно ли высказывание (здесь « $\ell|k$ » означает, что ℓ делит число k):

$$\forall n \in \mathbb{Z} \forall m \in \mathbb{Z} \exists k \in \mathbb{Z} \forall \ell \in \mathbb{Z} ((\ell|m) \wedge (\ell|n)) \Rightarrow ((k|m) \wedge (k|n) \wedge (\ell|k))?$$

Задача 12. Запишите на языке кванторов высказывание «у любых двух чисел есть наименьшее общее кратное».

Задача 13. Найдите НОД чисел 4652 и 468.

Задача 14. Найдите хотя бы одно решение уравнения $4652x + 468y = 12$ в целых числах.

Задача 15. Найдите остаток от деления числа 125^{146} на число 9.