

Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год

Дискретная математика

Теория информации – 1 (28 мая 2014)

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, К. Г. Куюмжиян, Р. Я. Будылин

**Задача 1.** Вася загадал один из дней недели. Петя может задавать вопросы об этом дне, на которые Вася будет правдиво отвечать «да» или «нет». За сколько вопросов Петя сможет гарантированно узнать загаданный Васей день, если

- (а) известно, что Вася загадал понедельник или вторник?
- (б) известно, что последняя буква в названии загаданного Васей дня недели — гласная?
- (с) известно, что загаданный Васей день — рабочий (с понедельника по пятницу)?
- (д) о загаданном Васей дне ничего не известно?
- (е) известно, что по мнению Васи в неделе 8 дней?

**Задача 2.** Составьте таблицу ответов к предыдущей задаче при продолжительностях «недели» от 1 до 16 дней.

**Задача 3.** Выведите общую формулу для количества вопросов, необходимых для угадывания одного объекта из  $n$ . Пользуясь этой формулой, решите аналоги первой задачи для угадывания дня месяца и для угадывания дня года.

**Задача 4.** Петя и Коля знают, что пароль на Васином почтовом ящике состоит из (а) 6; (б) 8; (с) 10 символов, каждый из которых — один из класса  $[-\_a-zA-Z0-9]$  — всего 64 символа (тире, подчёркивание, латинские буквы, цифры). Петя в день может задать Васе один вопрос о его пароле, на который Вася правдиво ответит «да» или «нет». Коля не пользуется таким доверием Васи, зато он написал программу, которая перебирает все пароли подряд, по одному в 1 микросекунду. У кого время гарантированного угадывания пароля Васи меньше: у Пети или у Коли?

**Задача 5.** Решите аналогичную задачу для пароля, являющегося случайным сочетанием двух слов из словаря, который есть у всех троих. Считайте, что в словаре около 250 000 слов.

**Задача 6.** Среди  $n$  монет есть ровно одна фальшивая. Известно, что фальшивая монетка весит легче, чем настоящая. За какое минимальное количество взвешиваний на чашечных весах без гирек можно гарантированно угадать, какая из монеток является фальшивой, если

- (а)  $n = 3$ ;
- (б)  $n = 9$ ;
- (с)  $n = 27$ ;
- (д)  $n = 123$ ;
- (е) Произвольного  $n$ .

**Задача 7.** \* Пусть есть 12 монет, одна из которых фальшивая. Причем, неизвестно легче она или тяжелее остальных. За какое минимальное количество взвешиваний на чашечных весах можно выявить фальшивую монету?

**Задача 8.** \* Есть 1000 кувшинов некоторого напитка. Достоверно известно, что в одном из кувшинов напиток отравлен. Надо вычислить, в каком. На это есть 10 кроликов, которых можно поить напитком (возможно, смешанным из разных кувшинов). Яд на кроликов действует даже в микродозах, но не сразу, а на следующий день (кролик, выпивший яд, умирает). За какое наименьшее число дней можно найти отравленный кувшин? (Кроликов не жалко, напиток тоже).

**Задача 9.** \* Есть 64 лампочки, которые включаются с помощью 64 кнопок, каждая своей кнопкой. Вам неизвестно какой лампочке соответствует какая кнопка. За один тест разрешается включить любой набор кнопок. Какое наименьшее количество тестов нужно провести, чтобы узнать точное соответствие лампочек и кнопок?

**Задача 10.** Царь посадил в тюрьму  $n$  оппозиционеров. В тюрьме есть комната с лампочкой. Каждый день одного из заключенных водят в камеру, где он может либо переключить лампочку, либо ничего не делать. Всех оппозиционеров отпускают в тот день, когда один из них, зайдя в комнату догадается, что все оппозиционеры уже побывали в этой комнате (если же узник скажет, что уже все побывали, а, на самом деле, не все, то их казнят). Известно, что в первый день комната темная, и что каждого узника будут водить неограниченное количество раз в комнату. Как оппозиционерам еще на свободе договориться так, чтобы благополучно выйти?

**Задача 11.** \* Все тот же царь решил казнить 50 оппозиционеров. Он объявил им, что их всех расставят на площади в шеренгу и на каждого оденут шапку красного или синего цвета. При этом 50-й видит шапки 49 человек перед ним, 48-й – 47 человек перед ним, и так далее. При этом никто не знает какого цвета шапка на нем. Начиная с 50-го, каждого оппозиционера спрашивают какого цвета шапка на нем. Тот громко объявляет цвет, и если ошибается, то его тут же казнят, а если нет, то отпускают. Как оппозиционерам заранее договориться о плане действий так, чтобы максимальное количество из них спаслось?

**Задача 12.** а) На острове невезения живут голубоглазые и кареглазые дикари. Есть и те, и другие. У них есть нелепый обычай: каждый вечер они садятся вокруг костра, и пристально смотрят на цвет глаз остальных. Тот, кто догадается до своего цвета глаз, в ту же ночь прыгает со скалы. И все бы ничего, да Джеймс Кук, покидая остров, заметил на прощание, что среди дикарей есть и кареглазые, и голубоглазые. Доказать, что теперь остров неминуемо вымрет.

Указание: чтобы разобраться в чем причина массового самоубийства, сначала рассмотрите случай двух или трех дикарей, а затем примените индукцию.

б)\*Какую новую информацию сообщил дикарям Кук?

Действует то же указание, что и к предыдущему пункту.

**Задача 13.** (\*) За круглым столом сидели  $k$  рыцарей и лжерыцарей, причем рыцарей было больше. На любой вопрос рыцарь отвечает правду, а лжерыцарь может ответить как правду, так и ложь. Разрешается каждому задавать вопрос: "Кем является такой-то: рыцарем или лжерыцарем?". Доказать, что за  $2k - 3$  вопроса про каждого можно установить кем он является.