Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год
Дискретная математика
Элементы теории графов-2 (29 и 31 января 2014)
Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, К. Г. Куюмжиян, Р. Я. Будылин

Определение 1. Неориентированный граф называется *связным*, если из любой его вершины можно попасть в любую другую, двигаясь по рёбрам. Если граф несвязный, то он распадается на несколько *компонент связности.*

Задача 1. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

Задача 2. В стране Миллениум некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2013 авиалиний, из города Тьма-Таракань – одна, а из всех остальных городов – ровно по 2012 авиалиний. Можно ли из Тьмы-Таракани добраться в столицу?

Задача 3. В стране Стодорожной из каждого города выходит ровно 100 дорог, и из любого города можно проехать в любой другой. Одну из дорог закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь можно добраться из любого города в любой другой.

Задача 4. Назовём граф «хлипким», если степень любой его вершины равна 1, 3 или 6. Докажите, что из связного «хлипкого» графа, содержащего 34 ребра, можно выкинуть ребро так, что он перестанет быть связным.

Определение 2. Связный граф без циклов называется *деревом.*

Задача 5. Докажите, что если в дереве удалить любое ребро, то получающийся граф перестанет быть связным.

Задача 6. Докажите, что граф является деревом тогда и только тогда, когда каждые две его вершины соединены ровно одним путём (все рёбра которого различны).

Определение 3. Вершина называется *висячей*, если из неё выходит ровно одно ребро.

Задача 7. Докажите, что в любом дереве найдётся висячая вершина.

Задача 8. Докажите, что число вершин дерева на единицу больше числа его рёбер.

Задача 9. В один из дней года оказалось, что каждый житель города сделал не более одного звонка по телефону. Докажите, что население города можно разбить на три группы так, что жители из одной группы не разговаривали в этот день по телефону.

Задача 10. В семейном альбоме есть 10 фотографий. На каждой из них изображены три человека: в центре стоит мужчина, слева от мужчины – его сын, а справа – его брат. Какое наименьшее количество различных людей может быть на фотографиях, если известно, что все 10 мужчин, стоящих в центре, различны?

Определение 4. Граф называется *остовом* связного графа G, если имеет те же вершины, что и G, получается из G удалением некоторых рёбер и является деревом.

Задача 11. Докажите, что любой связный граф имеет остов.

Задача 12. Двое по очереди режут верёвочки волейбольной сетки 20×10. Тот, после чьего хода сетка распадётся на два несвязных куска, покупает новую. Кому придётся идти за новой сеткой, если каждый старается избежать этой участи?

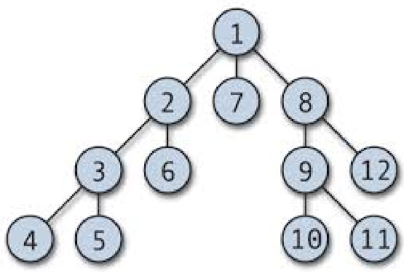
Задача 13. Докажите, что связный граф, у которого число вершин на единицу больше числа его рёбер, является деревом.

Задача 14. В некотором графе все вершины имеют степень три. Докажите, что в нём есть цикл.

Задача 15. a) Докажите, что при $n \geqslant 2$ в дереве с n вершинами найдутся хотя бы две висячие вершины.

b) Можете ли вы привести пример графа со 101 вершиной, из которых 100 висячих?

Задача 16. В цветочном городе живёт конечное число коротышек. В первый день заболело несколько коротышек. Если коротышка болеет, то к нему приходят все его друзья и заражаются (то есть становятся больными в следующий день). Если коротышка один день болел, то он выздоравливает на следующий день, и более того, получает иммунитет на этот день. Коротышка с иммунитетом может навещать друзей без риска заражения. Закончится ли эпидемия?



Предыдущая задача демонстрировала олимпиадную идею, которая называется «подвешивание за вершины». Она состоит в следующем. Пусть имеется подмножество V_0 вершин графа G. Обозначим через V_1 множество вершин среди $V \setminus V_0$, которые соединены ребром хотя бы с одной вершиной из V_0. Через V_2 обозначим множество вершин среди $V \setminus V_0 \setminus V_1$, которые соединены ребром хотя бы с одной вершиной из V_1, и так далее. Таким образом весь граф будет разделен на уровни $V_0, V_1, \ldots, V_k$. По-другому V_i можно охарактеризовать как множество вершин, из которых кратчайший путь в V_0 состоит из i рёбер. Дерево удобно представлять себе «подвешенным» за одну вершину. Эта вершина v_0 называется корнем, висячие вершины в таком представлении называются листьями. В любую вершину v из v_0 существует единственный путь. Например, на рисунке слева вершина 1 – корень, а вершины 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12 – листья.

Задача 17. Рёбра дерева окрашены в два цвета. Если в какой-то вершине сходятся рёбра одного цвета, то можно их все перекрасить в другой цвет. Можно ли всё дерево сделать одноцветным?

Задача 18. Будем красить в два цвета не рёбра, а вершины графа. Можно ли любое дерево раскрасить так, что любое ребро будет соединять вершины разных цветов?

Задача 19. На планете Абра-Кадабра 100 государств, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что из любого государства можно попасть в любое другое (возможно, с пересадками). Докажите, что можно совершить кругосветное путешествие (побывать в каждой стране), сделав не более 196 перелётов.

Задача 20. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным.

Задача 21. Маша нарисовала на доске 7 графов, каждый из которых является деревом с шестью вершинами. Докажите, что среди них найдутся по крайней мере два изоморфных.