

Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год

Дискретная математика

Элементы теории графов-1 (21 января 2014)

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, К. Г. Куюмжиян, Р. Я. Будылин

Задача 1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля–Меркурий, Плутон–Венера, Земля–Плутон, Плутон–Меркурий, Юпитер–Марс, Уран–Нептун, Нептун–Сатурн, Сатурн–Юпитер, Марс–Уран и Меркурий–Венера. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Задача 2. На доске (см. рис. 1 справа) в нижнем ряду в углах стоят 2 белых коня, а в верхнем — два чёрных. Можно ли поменять их местами, если чередовать ходы белыми и чёрными конями не обязательно?

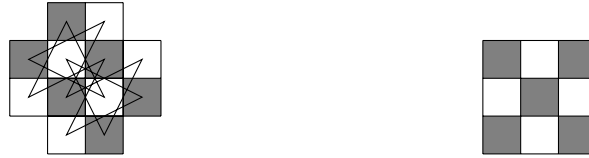


Рис. 1: Доски

Задача 3. Можно ли обойти доску (см. рис. 1 слева) ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

Определение 1. *Степенью* вершины графа называется число рёбер, выходящих из вершины.

Задача 4. Существует ли простой граф (т.е. неориентированный и без кратных ребер) с шестью вершинами, такой, что степени его вершин равны 2,2,2,4,5,5?

Задача 5. В группе 31 человек. Может ли быть у каждого из них ровно 5 друзей среди остальных?

Задача 6. В государстве 100 городов. Из каждого из них выходит 4 дороги, и любая дорога соединяет какие-то два города. Сколько всего дорог в государстве?

Задача 7. Дима, приехав из Врунландии, рассказал, что там есть несколько озер, соединенных реками. Из каждого озера вытекают три реки, в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он лукавит.

Задача 8. В некотором государстве есть столица и еще 100 городов. Некоторые из них соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Задача 9. На вечеринке каждый юноша танцевал с шестью девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Кого на вечеринке было больше: юношей или девушек?

Определение 2. *Полным* называется простой граф, у которого каждая вершина соединена ребром с любой другой.

Задача 10. В полном графе 7 вершин. Сколько в нём рёбер?

Задача 11. В полном графе 210 рёбер. Сколько в нём вершин?

Задача 12. В некотором государстве 101 город.

а). Каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением, причем в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из любого города можно доехать в любой другой, проехав не более, чем по двум дорогам.

б). Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причем в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из любого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по трем дорогам.

Задача 13. Докажите, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое знакомых, либо трое не знакомых друг с другом людей.

Задача 14. Каждый из 17 ученых переписывается с каждым из остальных на каком-то одном из трех языков. Докажите, что найдутся трое ученых, переписывающиеся друг с другом на одном языке.

Определение 3. Два графа называются *изоморфными*, если можно поставить в соответствие вершинам одного графа вершины другого графа так, чтобы ребру ставилось в соответствие ребро.

Задача 15. Найти пары изоморфных графов на рис. 2. Для всех пар неизоморфных графов доказать, что они неизоморфны.

