Отделение лингвистики, 2013-14 уч. год
Дискретная математика
Делимость – 2 (9 и 11 апреля 2014)
Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, К. Г. Куюмжиян, Р. Я. Будылин

Задача 1. Найти НОД чисел m и n и представить его в виде $km+ln$ для некоторых целых чисел k и l:

(a) $m = 7$ и $n = 2$;
(b) $m = 69$ и $n = 18$;
(c) $m = 152$ и $n = 44$;
(d) $m = a$ и $n = 20a + 1$ (где a — некоторое целое число);
(e) $m = 5a + 3$ и $n = 3a + 2$;
(f) $m = a - 1$ и $n = a + 1$;
(g) $m = a^2$ и $n = a - 1$.

Задача 2. Пусть $[n]$ — число из n единиц.

(a) Найдите остаток от деления числа $[m]$ на число $[n]$.
(b) Найдите $\gcd([m], [n])$. (gcd — это greatest common divisor, он же НОД.)
(c) Найдите остаток от деления числа $2^m - 1$ на число $2^n - 1$.
(d) Найдите $\gcd(2^m - 1, 2^n - 1)$.

Задача 3. Найдите какое-нибудь решение уравнения $28x+30y+31z = 365$ в целых числах.

Задача 4. Найдите хотя бы одно решение уравнения в целых числах

(a) $3x + 2y = 1$;
(b) $57x + 239y = 1$;
(c) $57x + 239y = 10$;
(d) $57x + 12y = 6$;
(e) $152x + 68y = 14$.

Дополнительная часть

Задача 5. Пусть $c \mid ab$ (то есть c делит ab), $\gcd(a, c) = 1$. Не пользуясь разложением на простые множители, докажите, что $c \mid a$.

Задача 6. * Найти все такие тройки натуральных чисел (a, b, c), что $\gcd(a, b, c) = 1$ и $a^2 + b^2 = c^2$.